



Supersymmetric Lattice Models. Field Theory Correspondence, Integrability
T.B. Fokkema

Samenvatting

De gecondenseerde materie is een vakgebied binnen de natuurkunde dat tot doel heeft om de fysische eigenschappen van een grote verscheidenheid aan materialen te begrijpen. Hierbij worden de verschillende fases waarin deze stoffen kunnen voorkomen en de faseovergangen daartussen bestudeerd. Bij een faseovergang veranderen de fysische eigenschappen van een materiaal drastisch.

Naast de alledaagse fases, als vaste stof en vloeistof zijn er nog tal van andere fases te benoemen, zoals de supergeleidende fase of het Bose-Einstein condensaat. Om de deeltjes, de atomen en elektronen, waaruit een materiaal is opgebouwd accuraat te kunnen beschrijven is de quantum-mechanica een noodzakelijk ingrediënt.

Van veel materialen zijn de eigenschappen goed te begrijpen aan de hand van fysische modellen. De basis van deze modellen is een Hamiltoniaan die de energie van de interacties tussen de verschillende deeltjes beschrijft. Vaak zijn de interacties tussen de deeltjes relatief zwak, zodat het systeem in benadering kan worden beschreven aan de hand van vrije deeltjes zonder interacties. De interacties worden dan later, orde voor orde, in een parameter die de interacties beschrijft, toegevoegd. Dit leidt tot een beschrijving in termen van quasi-deeltjes, wat de effectieve deeltjes zijn die ontstaan uit een combinatie van echte deeltjes en hun interacties met de omgeving.

Deze aanpak werkt erg goed voor bijvoorbeeld materialen die vlakbij het absolute nulpunt supergeleidend worden. Er zijn echter ook materialen ontdekt die al bij veel hogere temperaturen supergeleidend gedrag vertonen. Voor deze materialen moeten de interacties tussen de elektronen zo sterk zijn dat zelfs de relatief hoge temperatuur (de hoogst gevonden temperatuur ligt nu rond de $-135\text{ }^\circ\text{C}$) er niet voor zorgt dat er een weerstand in het materiaal ontstaat.

Om dit soort materialen te begrijpen zijn dus theoretische modellen nodig die de sterke interacties beschrijven. Een Hamiltoniaan voor een model met sterke interacties is op te schrijven, maar het uitrekenen van de gevolgen blijkt in veel gevallen zo goed als onmogelijk. Naast dat er veel experimenten worden gedaan om sterk gecorreleerde systemen te begrijpen, ligt er hier een belangrijke taak voor theoretici om nieuwe methodes te ontwikkelen om iets over het gedrag van dit soort systemen te kunnen zeggen. Daarmee kan dan in de toekomst misschien duidelijkheid worden verkregen over bijvoorbeeld het mechanisme dat ten grondslag ligt aan hoge-temperatuur supergeleiding.

Om sterk gecorreleerde systemen goed te begrijpen helpt het om een stapje opzij te doen van de echte materialen, en eerst een geïdealiseerd model in alle detail te begrijpen. In dit proefschrift wordt een serie modellen beschreven, genaamd M_k modellen (geïntroduceerd in ref. [6]), die sterk interagerende deeltjes op een rooster beschrijven. Daarbij wordt dit rooster steeds slechts één-dimensionaal genomen. Het model beschrijft in dit geval dus deeltjes (fermionen zonder spin) op een lijn. De interacties tussen de deeltjes in het M_k model zijn zo dat er maximaal k deeltjes naast elkaar kunnen zitten op de roosterpunten van deze

lijn. In hoofdstuk 2 van dit proefschrift worden de M_k modellen en diverse eigenschappen van deze modellen geïntroduceerd.

In de natuurkunde spelen symmetrieën een belangrijke rol. Als een model symmetrisch is onder een bepaalde operatie, maakt dit het oplossen eenvoudiger. Ook worden de hierboven genoemde faseovergangen beschreven aan de hand van symmetrieën, zo wordt de continue translatie symmetrie in een vloeistof gebroken naar een discrete translatie symmetrie bij de faseovergang naar een vaste stof. Het bijzondere aan de M_k modellen is dat ze per definitie een niet zo alledaagse symmetrie hebben, genaamd supersymmetrie. Deze symmetrie werd voor het eerst geïntroduceerd in de deeltjesfysica en relateert twee verschillende soorten deeltjes, bosonische en fermionische, aan elkaar. In het M_k roostermodel relateert deze symmetrie een even en oneven aantal fermionen aan elkaar, waardoor het toevoegen of weghalen van een deeltje uit het systeem via deze symmetrie geen energie kost. Een voorbeeld van een toepassing van supersymmetrie is het vinden van het aantal grondtoestanden van het model. Door de sterke interacties tussen de deeltjes zijn er meerdere manieren waarop de deeltjes een toestand van laagste energie kunnen vormen. Supersymmetrie zorgt ervoor dat dit aantal voor verschillende lengtes van het rooster gemakkelijk kan worden bepaald.

Een van de resultaten van dit proefschrift is dat er in het M_2 model voor de juiste keuze van parameters nog twee zogeheten dynamische supersymmetrieën zijn, waardoor het ook geen energie kan kosten om vier roosterpunten en drie deeltjes aan de een-dimensionale keten toe te voegen of twee roosterpunten en één deeltje. Voor dezelfde parameters blijkt het model dan zelfs helemaal exact oplosbaar (integreerbaar), in principe kunnen dan alle mogelijke energieën van het systeem via een zogeheten Bethe ansatz gevonden worden. Deze resultaten staan beschreven in hoofdstuk 3.

Een belangrijk punt bij faseovergangen is het kritisch punt. Bij de faseovergang tussen een vloeistof en een gas wordt het kritisch punt gekenmerkt door één bepaalde temperatuur en druk waarbij de dichtheid van de gasvormige en vloeibare fase aan elkaar gelijk worden en daarom niet meer te onderscheiden zijn. Op dit punt wordt de faseovergang tussen vloeistof en gas een continue faseovergang. Veel andere faseovergangen zijn altijd continu. Zo worden bij een magneet bij hoge temperaturen de grootte van de magnetische domeinen steeds kleiner, totdat op het kritisch punt de fluctuaties in de grootte van de domeinen zo groot zijn geworden dat er geen lengteschaal meer in het systeem te ontdekken is. Deze afwezigheid van een lengteschaal kenmerkt een kritisch punt. Hierdoor ontstaat een extra symmetrie in het systeem, namelijk schaal invariantie.

In dit proefschrift speelt schaal invariantie een belangrijke rol. De M_k modellen beschrijven een systeem met een bepaalde lengte en aantal deeltjes. Het is natuurlijk mogelijk om deze lengte en het aantal deeltjes erg groot te nemen. Expliciete berekeningen worden dan onmogelijk, maar in deze limiet kan een andere theorie worden opgesteld die het systeem beschrijft, een zogenaamde quantumveldentheorie. In het algemeen is het erg moeilijk om te weten hoe deze quantumveldentheorie er precies uit moet zien. Als een quantumveldentheorie in

twee dimensies (tijd en ruimte) naast de standaard translatie, rotatie en Lorentz symmetrie ook schaal invariant moet zijn dan heeft de theorie conforme symmetrie en wordt het een conforme veldentheorie. In het geval van de M_k modellen is er ook nog supersymmetrie en wordt het dus een supersymmetrisch conforme veldentheorie. Deze supersymmetrische conforme veldentheorieën zijn uitgebreid onderzocht en geëvalueerd. Daardoor is het ook precies bekend welke theorie het kritisch punt van het M_k model beschrijft. De precieze relatie tussen het M_1 model en de bijbehorende supersymmetrische conforme veldentheorie was in ref. [17] al bestudeerd. In hoofdstuk 4 van dit proefschrift beschrijven we de relatie ook in detail voor het M_2 model en later kijken we ook kort naar de M_k modellen voor hogere k .

In hoofdstuk 6 van dit proefschrift wordt de relatie tussen de M_k modellen en de supersymmetrische conforme veldentheorieën nog verder uitgediept. In plaats van te beginnen bij het roostermodel en dit met de veldentheorie te vergelijken, bestuderen we de relatie hier precies andersom. We beginnen met een supersymmetrische conforme veldentheorie en laten zien dat je met de juiste technieken eindige stukken uit deze theorie kan knippen en aan de hand hiervan eisen op kan leggen aan een roostermodel dat aan de veldentheorie gerelateerd is. In ref. [6] is deze techniek gebruikt om de M_k modellen te bedenken, in dit proefschrift wordt deze relatie precies gemaakt.

Zoals hierboven uitgelegd worden in hoofdstuk 3 van dit proefschrift de parameters beschreven waarvoor het M_2 model integreerbaar is, het kritisch punt behoort hier ook toe. In ref. [9] zijn voor alle M_k modellen de integreerbare parameters gevonden. Het kritisch punt is vanwege de grote hoeveelheid symmetrie erg goed begrepen. Het is erg interessant om ook buiten het kritisch punt de M_k modellen beter te kunnen begrijpen. De parameters waarvoor het model integreerbaar is spelen daarbij een belangrijke rol. Door de parameters op de juiste manier een periodieke modulatie te geven over de roosterpunten blijft het model integreerbaar en komt het in een zogeheten massieve fase terecht. In een massieve fase zijn de hogere energietoestanden van het model een stuk verwijderd van de laagste energietoestanden. In een quantumveldentheorie correspondeert dit altijd met een theorie die een deeltje met massa beschrijft (die heeft namelijk rustenergie mc^2), vandaar dat het een massieve theorie heet. In de kritische fase gaat het energieverval tussen de geëxciteerde toestanden en de grondtoestanden naar nul voor grote systeem lengtes.

In hoofdstuk 5 van dit proefschrift bekijken we wat er gebeurt met de eigen-toestanden van het M_2 en M_3 roostermodel als we ze volgen vanaf het kritisch punt naar de massieve fase. Daarbij maken we de periodieke modulatie steeds groter totdat deze zo groot is dat het op bepaalde roosterpunten geen energie meer kost om een deeltje toe te voegen. We bekijken ook specifieke defecten in het roostermodel, in het M_2 model mogen er op de locatie van een defect bijvoorbeeld niet twee deeltjes naast elkaar zitten. Het toevoegen van dit soort defecten leidt tot een interessante verandering in de relatie met de conforme veldentheorie en in de limiet van zeer sterke modulatie komen er extra grondtoestanden bij. Deze

defecten blijken zich te gedragen als quasi-deeltjes met een fractionele lading die voldoen aan de fusie regels van de velden in de conforme veldentheorie. Deze fusie regels zijn regels die beschrijven hoe twee velden fuseren als ze een excitatie op dezelfde plek hebben.

Er is ook een interessante relatie tussen de één-dimensionale M_k roostermodellen en twee-dimensionale fysische systemen waarin het Hall-effect optreedt. Het Hall-effect wordt waargenomen als er loodrecht op de richting van een elektrische stroom een magneetveld wordt aangebracht. Dit leidt er dan toe dat er loodrecht op de stroomrichting een spanning ontstaat (de Hall-spanning). Bij extreem lage temperaturen ontstaan er in de grootte van de Hall-spanning plateaus, de spanning is gequantiseerd, dit is het quantum-Hall effect. De golffuncties van de elektronen in een quantum-Hall systeem kunnen via een conforme veldentheorie worden berekend. Dit zijn precies dezelfde conforme veldentheorieën als degene die gerelateerd zijn aan de M_k modellen. Het blijkt dat er ook in de massieve fase van de M_k modellen parallellen te vinden zijn met de fysica in quantum-Hall systemen. Ook dit staat beschreven in hoofdstuk 5.

Omdat we ervoor kiezen om massieve fase te bestuderen voor parameters waarvoor het M_2 model integreerbaar is, weten we ook in dit geval genoeg om de bijbehorende quantumveldentheorie te identificeren. In dit geval is dit een massieve, integreerbare, supersymmetrische quantumveldentheorie. In hoofdstuk 4 laten we zien dat deze theorie de supersymmetrisch sine-Gordon theorie is. In hoofdstuk 7 worden de eerste stappen tot het precies maken van de relatie tussen het massieve M_2 model en deze quantumveldentheorie gezet door de limiet van extreem sterke modulatie te nemen van het roostermodel. In deze limiet kunnen de excitaties in het M_2 model beschreven worden als kinks tussen drie verschillende grondtoestanden. Deze kinks zijn terug te vinden als fundamentele excitaties in de massieve veldentheorie.

Het onderzoek in dit proefschrift draagt vooral bij aan een beter begrip van de M_k modellen en hun relatie met andere modellen. Met meer onderzoek zullen deze relaties in de toekomst waarschijnlijk nog preciezer gemaakt kunnen worden. Doordat we supersymmetrie als hulpmiddel gebruiken en ons beperken tot integreerbare theorieën beschrijven we niet direct een echt fysisch materiaal. Onderzoek naar deze modellen draagt echter bij aan een beter begrip van sterk gecorreleerde deeltjes, wat in de toekomst gebruikt kan worden voor het bestuderen van fenomenen in materialen met sterke interacties tussen de deeltjes.